

Sobre la convexidad de la longitud exponencial en el grupo unitario

Gabriel Larotonda*

Resumen

Si le damos al grupo unitario la métrica Riemanniana invariante proveniente de la traza usual, se obtiene una conexión de Levi-Civita cuyas geodésicas coinciden con los grupos a un parámetro $\alpha(t) = ue^{tx}$, donde u es unitario y $x^* = -x$ es un vector en el álgebra de Lie. Sorprendentemente, si se reemplaza la métrica en el álgebra de Lie por aquella dada por la norma usual de matrices (el máximo de los valores singulares), estas curvas siguen siendo cortas para la distancia d_∞ inducida por dicha métrica. Es también sabido que, con la métrica Riemanniana d_2 de la traza, la curvatura seccional del grupo unitario es *positiva*, y de hecho, este espacio es de alguna manera asimilable a un producto de esferas.

En esta charla mostraremos cómo la distancia geodésica $f_\infty(t) = d_\infty(v, \alpha(t))$ entre un unitario v y una geodésica $\alpha(t)$ como arriba, es una función convexa de t , siempre que v y α estén suficientemente cercanos. Esta propiedad también puede considerarse sorprendente, si recordamos que la convexidad de la distancia geodésica es un hecho asimilable a los espacios de curvatura seccional *no positiva*; sin embargo esta propiedad local de convexidad entre un punto y una geodésica, aunque menos conocida, es también válida en la esfera unitaria. La prueba de la propiedad de convexidad que presentaremos se basa en una estimación precisa de la convexidad de la distancia $f_p(t) = d_p(v, \alpha(t))$, para p par, donde la distancia ahora es aquella inducida por las normas p de Schatten dada por la norma ℓ_p usual de los valores singulares de los elementos del álgebra de Lie.

Referencias

- [1] E. Andruchow, G. Larotonda. The rectifiable distance in the unitary Fredholm group. *Studia Math.* 196 (2010), 151-178.

*Trabajo conjunto con Esteban Andruchow.