Ecuaciones Cohomológicas y Rigidez: La Conjetura de Katok en dimensión 3

Alejandro Kocsard

IMPA, Rio de Janeiro

Las llamadas *ecuaciones cohomológicas* son probablemente las ecuaciones diferenciales más sencillas que podemos concebir sobre una variedad diferencial M cualquiera. Éstas son de la forma

$$Xu = f, \tag{1}$$

donde $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial C^∞, f es una función real dada, y u es la incógnita de la ecuación.

A pesar de la sencillez aparente de (1), en general es muy difícil estudiar esta ecuación en la categoría C^∞, espcialmente, cuando M es una variedad cerrada, es decir, compacta, conexa y sin borde.

En este caso, si pensamos al campo vectorial X como siendo un operador lineal sobre $C^\infty(M, \mathbb{R})$, es bastante sencillo verificar que

$$\operatorname{codim} X \geq 1, \tag{2}$$

y es bien sabido que el toro d-dimensional $\mathbb{T}^d$ admite ciertos campos vectoriales, llamados campos *Diofantinos*, para lo cuales en (2) vale la igualdad. Esto llevó a Anatole Katok a conjeturar que, de hecho, estos son los únicos campos vectoriales para los cuales se verifica la igualdad en (2). Más precisamente, él propuso la siguiente

Conjetura (Katok (1984) [1])**.** *Sea M una variedad cerrada y orientable, y supongamos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ exhibe la siguiente propiedad: $\forall\, f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $\exists\, u \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $\exists\, c \in \mathbb{R}$, tales que*

$$Xu = f - c. \tag{3}$$

Entonces M es difeomorfa a $\mathbb{T}^d$ y X es C^∞-conjugado a un campo Diofantino.

En esta charla haremos una exposición elemental sobre las diferentes dificultades que se presentan cuando intentamos resolver estas ecuaciones cohomológicas y daremos algunas ideas sobre las técnicas utilizadas en la prueba de la conjetura de Katok para 3-variedades [2].

Referencias

[1] S. Hurder. *Problems of rigidity of group actions and cocycles*. Ergodic Theory & Dynamical Systems **5** (1985), 473–484.

[2] A. Kocsard. *Toward the classification of cohomology-free vector fields*. Tese de Doutorado, IMPA (2007). Disponible on-line: http://arxiv.org/abs/0706.4053