

Actividades con GeoGebra

Nociones básicas, rectas

Silvina Ponce Dawson

Introducción.

El GeoGebra es un programa que permite explorar nociones matemáticas desde distintas perspectivas. Combina un manejo icónico de las operaciones con programación entrando instrucciones por una línea de comandos. Eso lo hace muy versátil e instructivo, ya que lo icónico resulta más intuitivo para los estudiantes y de ese modo se les puede introducir, por ejemplo, nociones de programación. Cuando se abre el programa aparece una vista gráfica, una algebraica y abajo, una barra de entrada donde se pueden escribir comandos. Esto refleja lo que acabamos de decir: por un lado la visualización y por el otro las expresiones algebraicas y la programación. En este tutorial vamos a explorar sólo algunas de las herramientas que brinda el GeoGebra. En primer lugar, “visitaremos” algunas de las posibilidades icónicas y luego nos centraremos en una actividad alrededor del tema “rectas”. El tutorial fue escrito utilizando una versión de GeoGebra en inglés por lo que algunos nombres pueden diferir respecto de los que se usan en la versión en castellano.

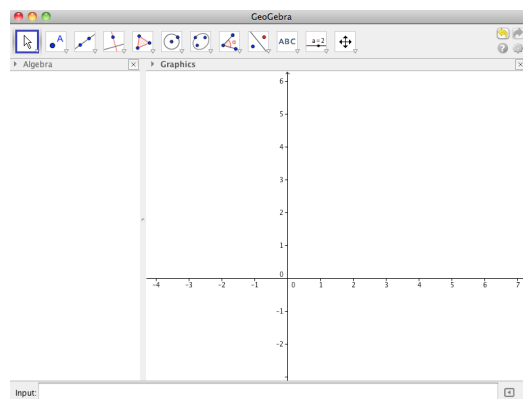


Figura 1. Imagen de la ventana de GeoGebra (versión en inglés y en sistema operativo MacOS).

Para explorar las distintas posibilidades, instamos a que recorran con el mouse los distintos íconos que aparecen en la parte superior de la pantalla. Aparecerá entonces una breve descripción de qué significa cada uno. Algunos de ellos tienen un pequeño ángulo invertido en el extremo inferior derecho. Eso significa que el ícono ofrece varias opciones. Si clickean en ese pequeño triángulo con el botón izquierdo del mouse verán cuáles son las distintas opciones. Incluso, si clickean en uno de esos triángulos (por ejemplo, el correspondiente al del primer ícono, como se muestra en la Figura 2) y luego se desplazan con el mouse sobre los otros íconos, verán cuáles son las opciones que cada uno ofrece. De acuerdo a la opción que se elija, el objeto que se construirá

sobre el gráfico tendrá distintas propiedades y por lo tanto, las mantendrá cuando lo cambiemos de algún modo (por ejemplo, moviéndolo).

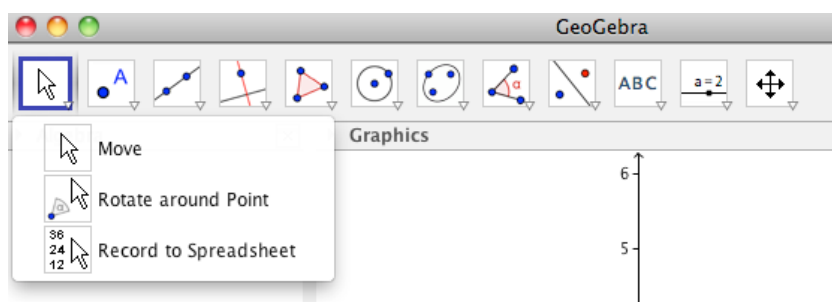


Figura 2. Íconos de Geogebra y desplegable correspondiente al primero de ellos.

Rectas y puntos.

Comencemos construyendo una recta. Para ello cliqueamos con el botón izquierdo el ícono correspondiente (ver el que aparece recuadrado en la Fig. 3a) y después vamos a la zona gráfica, cliqueamos con el botón izquierdo en un punto (en el ejemplo de la Fig. 3a, el punto (1,1)) y allí aparece una recta que se mueve cuando nosotros movemos el mouse hasta que cliqueemos en el segundo punto por el que queremos que pase (en el ejemplo de la Fig. 3a, el punto (4,3)). Veamos el ejemplo de la Fig. 3a. Vemos en la parte de vista algebraica la ecuación implícita de la recta y luego las coordenadas de los puntos A y B que aparecen indicados en el gráfico (y que fueron los puntos que elegimos para dibujar la recta). Si con el mouse nos apoyamos sobre la ecuación de la recta y apretamos el botón derecho vemos una serie de opciones. Una de ellas es la de re-escribir la ecuación como se lo hace más habitualmente en los colegios ($y=mx + b$). Podemos elegirla del desplegable y entonces se re-escribirá la ecuación con ese formato. Vemos cómo aparece en la Fig. 3b).

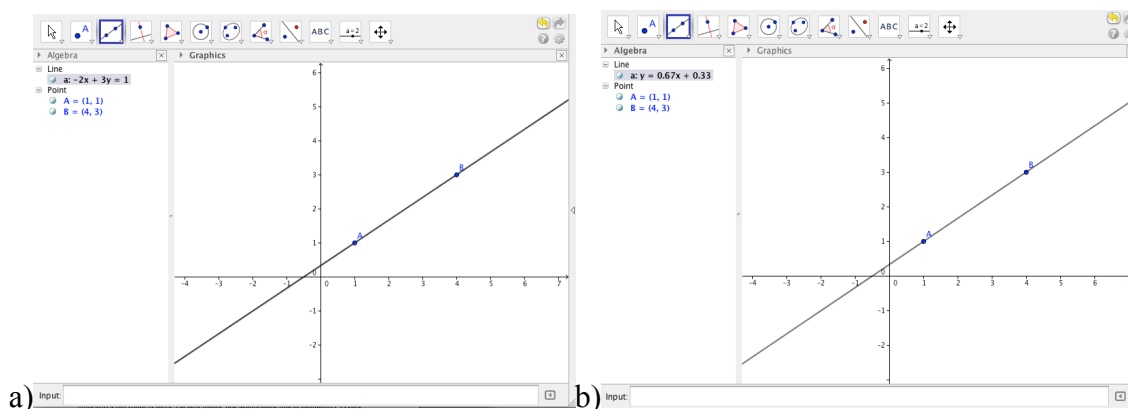


Figura 3

En el desplegable que nos ofrece el programa cuando cliqueamos con el botón derecho sobre, por ejemplo, la ecuación de la recta, aparecen otras opciones, entre otras, propiedades del objeto. Si elegimos esa opción se abre una ventana desde la que podemos cambiar las propiedades del objeto o de cómo se lo muestra en el gráfico (por ejemplo, cambiar el color, mostrarlo o no mostrarlo, etc). Dentro de las opciones básicas se puede ver que el objeto tiene un nombre (en este caso, a) y cómo fue definido, en este caso Line[A, B] (ver Fig. 4). Lo mismo podemos hacer con los otros objetos de la figura, en nuestro ejemplo, los puntos A y B. Vemos, en particular, que $A=(1,1)$ y $B=(4,3)$. Esto

nos muestra cómo podemos crear una recta similar sin apelar a los íconos, sino entrando comandos en la barra de entrada que se encuentra en el extremo inferior de la ventana del programa.

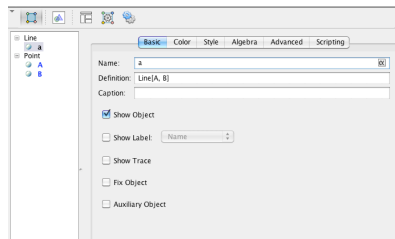


Figura 4

Si queremos, por ejemplo, definir una recta que pasa por los puntos $C=(1,2)$ y $D=(3,1)$ sin hacerlo gráficamente, podemos definir dichos puntos escribiendo $C=(1,2)$ en la barra de entrada, apretar la tecla enter y luego escribir $D=(3,1)$ y volver a apretar enter. En la Fig. 5 mostramos la ventana antes de haber apretado este último enter.

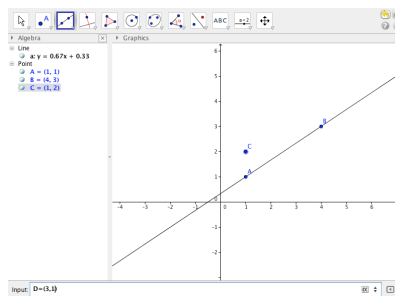


Figura 5

De este modo definimos los puntos C y D. Ahora, para definir la recta tenemos que elegirle un nombre, por ejemplo, recta2 y escribir en la entrada $\text{recta2}=\text{Line}[C,D]$ (enter). Obtenemos entonces el gráfico que se muestra en la Fig. 6.

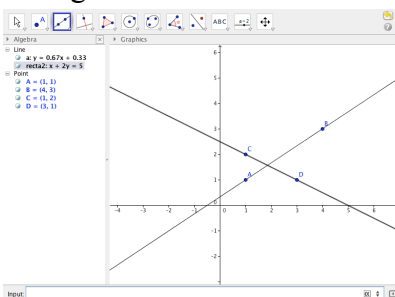


Figura 6

Podemos encontrar la intersección entre objetos, en este caso, entre las dos rectas que dibujamos. Para ello cliqueamos en el triángulo del extremo inferior del ícono que corresponde a dibujar un punto y elegimos, del desplegable, el que corresponde a intersección de objetos. Una vez elegida esa opción podemos clicar con el botón izquierdo del mouse en cada uno de los objetos cuya intersección se quiere encontrar o clicar directamente en la intersección. En el ejemplo que estamos siguiendo esto genera un nuevo punto, E, cuyo valor se lista en la parte de vista de algebraica como se muestra en la Fig. 7.

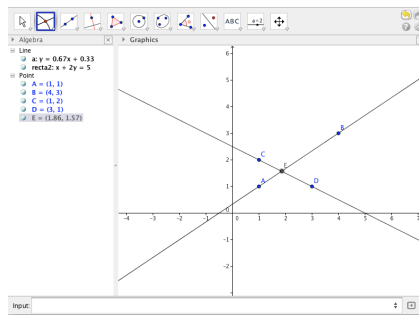


Figura 7

Los objetos que aparecen en el gráfico pueden moverse, para ello es necesario seleccionar la opción de mover objetos (disponible en el primero de los íconos) cliqueando el ícono con el botón izquierdo, luego hay que apoyarse sobre el objeto que se desea mover, apretar el botón izquierdo del mouse y, mateniéndolo apretado, moverse sobre el plano. Ahora bien, no todos los objetos pueden moverse de igual modo. En el ejemplo que estamos siguiendo acá, podemos mover los puntos A, B, C y D como queramos, ya que fueron definidos independientemente de toda otra definición previa. E, sin embargo, no puede moverse libremente: E está definido de modo que corresponde a la intersección entre las rectas que pasan por A y B y por C y D. El hecho de que se trata de una cantidad dependiente de otras se ve en la definición de E que se hace visible cliqueando con el botón derecho sobre la línea de la vista algebraica que menciona su valor y eligiendo la opción propiedades del desplegable. Vemos entonces que E está definido como $E = \text{Intersect}[\text{recta2}, a]$. Por lo tanto, se va a mover cuando movamos a recta2 o a la recta a de modo de seguir siendo todo el tiempo el punto de intersección entre ambas. Esto da una idea de que hay objetos “independientes” y otros “dependientes” y de que hay que tener en cuenta eso si uno quiere generar modificaciones en el gráfico durante la clase. Una propiedad particular de GeoGebra es que a veces hay una interdependencia entre los objetos. En el ejemplo que estamos considerando, uno puede mover el punto A o el B y se moverá la recta “a”, análogamente, se moverá recta2 si movemos C o D. Sin embargo, también es posible mover las rectas y “arrastrar” a los puntos correspondientes con dicho movimiento. Por ejemplo, si uno mueve la recta “a” se mueven los puntos A y B. Comprobarlo moviendo los puntos y las rectas. Para mover las rectas es necesario arrastrarlas cliqueando con el botón izquierdo sobre un punto cualquiera de ellas que no coincida con los que usaron para definir las (en nuestro ejemplo, A, B, C y D). Moviendo rectas se pueden ilustrar los significados de la pendiente y de la ordenada al origen. Moviendo uno de los puntos que se usaron para definir las se puede ilustrar el significado del signo de la pendiente (ya que de ese modo se gira la recta alrededor del otro punto que se usó para definirla).

Dada una recta es posible graficar la recta perpendicular o la paralela a ella que pasa por algún punto. Vamos a hacerlo con el ejemplo que venimos siguiendo. Para ello vamos a borrar los puntos C y D (ver qué pasa cuando se hace eso) y “volvemos atrás” moviendo la recta “a” de modo que pase por los puntos (1,1) y (4,3) como antes (se puede volver atrás con la opción de deshacer, también podemos redefinir la recta). Para elegir la recta perpendicular a la recta “a” cliqueamos con el botón izquierdo en el ícono correspondiente, luego cliqueamos sobre la recta respecto de la cual queremos calcular la perpendicular y finalmente cliqueamos sobre el punto, fuera de ella, por donde queremos que pase la perpendicular. Al hacer eso se crea un nuevo punto (C) como se muestra en la Fig. 8a). Para graficar la recta paralela se procede de un modo similar. La opción de graficar una recta paralela se obtiene a partir del mismo ícono que se usa para la recta perpendicular. Para acceder a la opción es necesario clicar sobre el pequeño triángulo del extremo inferior izquierdo del ícono y, en el desplegable, se encontrará la opción (ver Fig. 8b) donde se ve también una recta

paralela ya graficada utilizando esta opción).

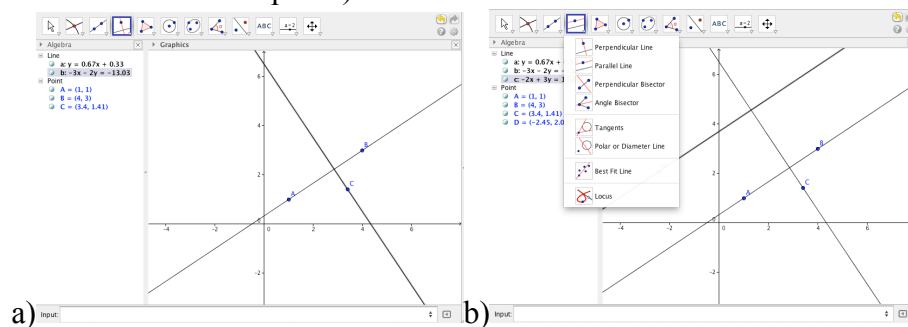


Figura 8

En la vista algebraica, cliqueando dos veces sobre la expresión de la recta que nos interesa vemos también cómo está definida. Por ejemplo, vemos que en el ejemplo la recta perpendicular se llama b y está definida por $b = \text{PerpendicularLine}[C, a]$. El programa brinda también la opción de ilustrar qué significa la pendiente de una recta. Para ello existe una opción “pendiente” (slope en inglés) dentro del desplegable correspondiente a la construcción de ángulos. Cliqueando en esa opción y luego en alguna de las rectas en la vista gráfica se dibuja un pequeño triángulo rectángulo cuyo cateto horizontal mide 1 y el vertical toma el valor de la pendiente. Por otro lado, en la vista algebraica aparece una variable que toma el valor de la pendiente que se acaba de calcular. En la Fig.9 se muestra qué se ve después de haber elegido la opción pendiente y habérsela aplicado a cada una de las rectas que aparecen en el gráfico. En este ejemplo “m” corresponde a la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B, “m₁” a la de la recta perpendicular a ella que pasa por C y “m₂” a la de la recta paralela a la primera que pasa por D. Cabe notar que, aunque en las vistas se muestra a estas últimas dos variables como m₁ y m₂, sus verdaderos nombres son m_1 y m_2 (verlo mirando las propiedades del objeto). Prueben mover las rectas, fíjense qué movimientos están permitidos (relacionarlos con lo discutido antes sobre objetos dependientes y objetos independientes). En particular, vemos que sólo podemos mover las rectas perpendicular y paralela si movemos los puntos por los que definimos que pasaran. Es decir, para moverlas es necesario mover los puntos, no así para la recta original que puede moverse libremente arrastrando a los puntos que la definen en su movimiento. Al mover los distintos objetos vean también cómo varían las distintas cantidades listadas en la vista algebraica. Tener variables (en este caso, m, m_1 y m_2) donde están guardados los valores de las pendientes de las rectas graficadas nos permite hacer operaciones con ellas cuyos resultados irán variando a medida que las rectas se muevan y varíen sus pendientes. De este modo podemos comparar las pendientes entre rectas paralelas o perpendiculares e ilustrar sus propiedades. Por ejemplo, podemos calcular el producto entre las pendientes de la primera recta (m) y de la perpendicular a ella (m_1). Lo hacemos escribiendo en la barra de entrada que está en el extremo inferior de la ventana la siguiente expresión: $\text{ProdPend} = m * m_1$ y hacemos enter. Aparece entonces en la vista algebraica una nueva variable, ProdPend, con su valor. Una vez definida esta nueva variable podemos mover las rectas y ver que todo el tiempo es $m = m_2$ y $\text{ProdPend} = -1$.

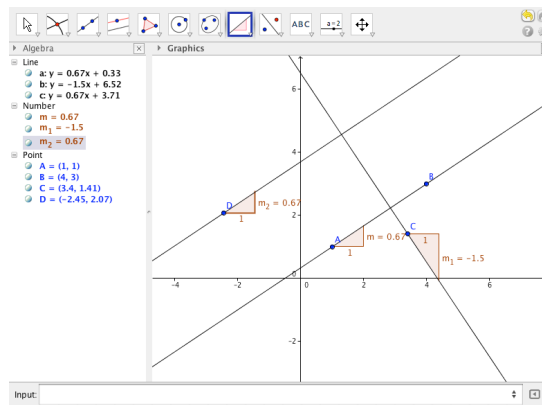



Figura 9

Finalmente vamos a ilustrar otra herramienta con la que cuenta el GeoGebra que permite hacer animaciones: el deslizador.  Cuando elegimos esta opción y cliqueamos con el botón izquierdo del mouse sobre un punto del gráfico se abre una ventana que permite elegir varias opciones (ver Fig. 10). Elijamos las opciones que nos brinda el programa por defecto. Esto significa que estamos eligiendo una variable (a la que llamamos “d” en el ejemplo de la Fig. 10) que puede tomar los valores: -5, -4.9, -4.8, -4.7, ..., 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 5; es decir, cualquier valor entre -5 y 5 con un espaciado de 0.1 entre dos valores consecutivos. Cuando aceptamos esta opción aparece el deslizador sobre la vista gráfica como un segmento y la variable “d” como un punto sobre el deslizador. Al inicio d tiene algún valor arbitrario dentro de los que puede tomar. Podemos variar el valor de “d” deslizando el punto sobre el deslizador. Como siempre, eso se hace arrastrando el punto con el botón izquierdo. ¿Para qué puede servirnos esto? Por ejemplo, podemos definir objetos que dependan del valor que toma d y cambiarlos moviendo d sobre el deslizador. Vamos a usarlo para redefinir la recta paralela que ya tenemos en el ejemplo.

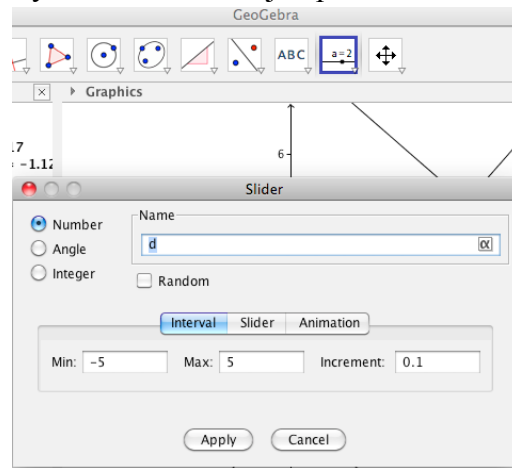


Figura 10

Definamos un punto $E=(0,d)$. Lo hacemos entrando esta igualdad y haciendo enter en la barra de entrada que se encuentra en el extremo inferior de la ventana del GeoGebra. Una vez que hacemos eso aparece en la vista algebraica el valor que tiene E inmediatamente después de haberlo definido. Prueben mover el punto del deslizador y vean qué pasa con E. E va variando y por lo tanto se va moviendo en la vista gráfica. Ahora vamos a modificar la recta paralela a “a” de modo que pase siempre por E. Para ello cliqueamos sobre la expresión de la recta y elegimos la opción Propiedades del desplegable. Vemos entonces que la recta está definida como $\text{Line}[D, a]$. Vamos a modificar eso de modo que, en lugar de pasar por D, pase por E. Es decir, reemplazamos su definición por $\text{Line}[E, a]$. Prueben mover el deslizador. Al hacerlo, se mueve la recta. Ahora bien, el deslizador brinda una opción de animación. Eso significa que puede ir tomando los diversos valores

permitidos automáticamente a lo largo del tiempo. Al hacerlo se irán moviendo los objetos que dependan de su valor, en nuestro ejemplo, el punto E y la recta que pasa por E. Para animarlo, nos posicionamos sobre el deslizador y clickeamos con el botón derecho del mouse. Aparece entonces un desplegable entre cuyas opciones aparece la de animación. Elijanla y vean qué sucede.

